

**LÖSUNGEN ZU DEN T4-ÜBUNGEN**  
**MITTSCHRIFT ZUR ÜBUNGSGRUPPE VON PROF. GROSSE**

MARKUS DRAPALIK  
VERSION VOM 14.03.2006

1. BSP 1

1.1. **Angabe.** Gegeben sei eine Observable im endlich-dimensionalen Hilbertraum. Mit  $\text{Tr}$  sei der Spurzustand bezeichnet. Zeigen Sie die Linearität, die Zyklizität und die Invarianz unter unitären Transformationen für diesen Zustand. Betrachten sie auch die Normierung!

1.2. **Lösung.**

$$\text{Tr } A = \sum_n \langle \varphi_n | A \varphi_n \rangle$$

1.2.1. *Linearität.*

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_n \langle \varphi_n | (\lambda A + \mu B) \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n (\langle \varphi_n | \lambda A \varphi_n \rangle + \langle \varphi_n | \mu B \varphi_n \rangle) \\ &= \sum_n \lambda \langle \varphi_n | A \varphi_n \rangle + \sum_n \mu \langle \varphi_n | B \varphi_n \rangle \\ &= \lambda \text{Tr } A + \mu \text{Tr } B \end{aligned}$$

1.2.2. *Positivität.*

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^* A) &= \sum_n \langle \varphi_n | A^* A \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle A \varphi_n | A \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n ||A \varphi_n||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2.3. *Zyklizität.*

$$\begin{aligned} \text{Tr } AB &= \sum_n \langle \varphi_n | AB \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle B^\dagger A^\dagger \varphi_n | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle BA \varphi_n | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \underbrace{\langle \varphi_n | BA \varphi_n \rangle}_{\text{reell!}} \\ &= \text{Tr } BA \end{aligned}$$

1.2.4. *unitäre Transformation.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(U^\dagger A) U &= \mathrm{Tr} \underbrace{U U^\dagger}_1 A \\ &= \mathrm{Tr} A\end{aligned}$$

1.2.5. *Normierung.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \mathbf{1} &= \sum_n \langle \varphi_n | \mathbf{1} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n 1 \\ &= N\end{aligned}$$

Normierung daher mit  $\frac{1}{N}$ :

$$w(\mathbf{1}) = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_n \langle \varphi_n | \mathbf{1} | \varphi_n \rangle}_N = 1$$

2. BSP 2

2.1. **Angabe.** Gegeben sei der Spurzustand über den zwei mal zwei Matrizen (Spin  $\frac{1}{2}$  System). Berechnen Sie die Erwartungswerte der Spinkomponenten und deren Schwankungsquadrate.

Erläuterungen

Was ist der Erwartungswert von  $S_i$  im Zustand  $\varrho$ ?

$$\langle S_i \rangle_{\varrho} = \text{Tr } \varrho S_i$$

weilers:

$$\varrho^\dagger = \varrho \geq 0$$

$$\text{Tr } \varrho = 1$$

$$A \mapsto w(A) |_{\in \mathbb{C}}$$

$$\alpha \langle \psi_1 | A \psi_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle \psi_2 | A \psi_2 \rangle \begin{cases} A \mapsto \langle \psi_1 | A \psi_1 \rangle \\ A \mapsto \langle \psi_2 | A \psi_2 \rangle \end{cases}$$

$$\alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2 = \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 - i n_2 \\ n_1 + n_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\sum n_i^2 = 1 \Rightarrow \text{reiner Zustand}$$

$$\sum n_i^2 < 1 \Rightarrow \text{gemischter Zustand (Bloch-Sphäre)}$$

2.2. **Lösung.**

$$\text{Basis: } A_2 = \{1, \vec{\sigma}\}, \quad A_2 = \text{Mat}(2, \mathbb{C})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ilk} \sigma_k$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \sigma_1 &= \langle \uparrow | \sigma_1 | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \sigma_1 | \downarrow \rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

analog

$$\text{Tr } \sigma_2 = \text{Tr } \sigma_3 = 0$$

$$(\Delta \sigma_i)^2 = \langle \sigma_i^2 \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \sigma_i^2 &= \langle \uparrow | 1 | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | 1 | \downarrow \rangle \\ &= 2\end{aligned}$$

Schwankungsquadrat ist also 2

für  $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ :

$$\begin{aligned}(\Delta\sigma_i)^2 &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr} (S_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{4} 2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}$$

**2.3. andere Lösung.**

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \rho\end{aligned}$$

$$\langle \sigma_i \rangle_\rho = \mathrm{Tr} (\rho \sigma_i)$$

**2.4. in der VO.**

$$\begin{aligned}\langle S_i \rangle &= \mathrm{Tr} \rho S_i \\ &= \mathrm{Tr} \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} \mathbf{1} \sigma_i\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr} \sigma_i = 0$$

$$\langle S_i \rangle = 0$$

$$(\Delta S_i)^2 = \langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2$$

$$(\Delta S_i)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

## 3. BSP 3

3.1. **Angabe.** Ein Zustand sei durch den zweidimensionalen Projektor auf den Unterraum, aufgespannt von der Wellenfunktion  $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ , gegeben. Berechnen Sie wie unter 2. Erwartungswerte und Schwankungsquadrate der Komponenten des Spinoperators.

3.2. **Lösung.**

$$\begin{aligned}\langle \sigma_1 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ \langle \sigma_2 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \langle \sigma_3 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \langle \sigma_i^2 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\end{aligned}$$

für  $\sigma_i \rightarrow S_i$  Ergebnisse mit  $\frac{\hbar}{2}$  multiplizieren (Schwankungsquadrat mit  $\frac{\hbar^2}{4}$ )

3.3. **in der VO.**

$$\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle S_1 \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle S_2 \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} i & -i \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle S_3 \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle S_i^2 \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{8} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}$$

$$(\Delta S_1)^2 = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} = 0$$

$$(\Delta S_2)^2 = \frac{\hbar^2}{4} - 0 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$(\Delta S_3)^2 = \frac{\hbar^2}{4} - 0 = \frac{\hbar^2}{4}$$