

# Kapitel 3

## Spezielle Funktionen

Funktionen wie die *Legendre-Polynome* (3.1), die *Besselfunktion* (3.2), die *Hermite-Polynome* (3.3) oder die *Laguerre-Polynome* (3.4) hängen mit den Lösungen diverser Randwertprobleme zusammen, sowie mit den Lösungen partieller Differentialgleichungen.

### 3.1 Legendre-Polynome

**Definition.** Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome ist<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

wenn  $|1-2xt+t^2| < 1$ , ergibt sich nach Taylor-Entwicklung und unter Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned} (1-2xt+t^2)^{-1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} (-2xt+t^2)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} t^{2k} (-2xt)^{l-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} \binom{l}{k} t^{l+k} (-2x)^{l-k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

wenn Doppelsumme absolut konvergent ist, also wenn  $|t^2| < 1$ ,  $|2x| < 1$ , können wir umordnen

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

16.03

**Beispiel.**

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

---

<sup>1</sup>Das ist ein wenig verwirrend, aber man gewöhnt sich daran  
Tipp:  $x$  ist immer das, woraus die Polynome werden

wo  $\varepsilon = -2xt + t^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + xt + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)t^2 + \dots$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$\vdots$

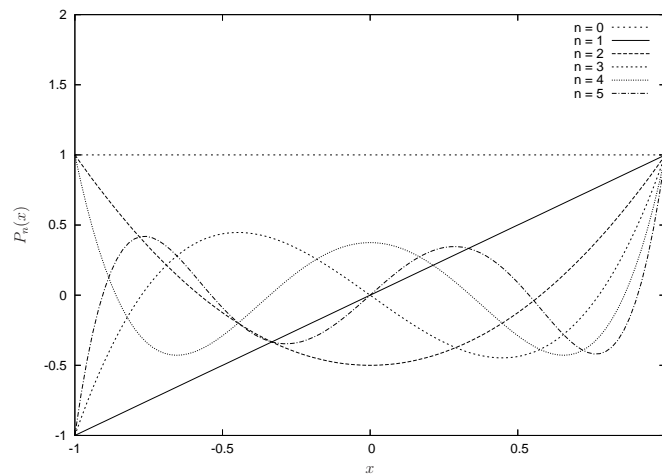


Abbildung 3.1: Die ersten sechs Legendre-Polynome  $P_n$

**Beispiel.** Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ ,  $R = |\mathbf{x}'| > r = |\mathbf{x}|$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r}{R}\right)^l \end{aligned} \tag{3.2}$$

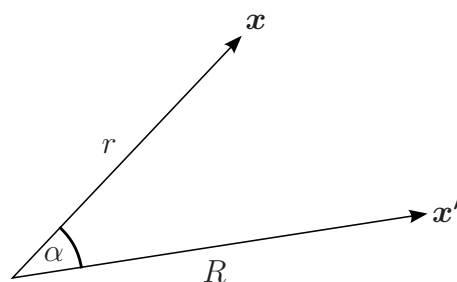


Abbildung 3.2: Additionstheorem der Legendre-Polynome

Wir führen nun den neuen Summationsindex  $n = l + k$  in 3.1 ein:

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \binom{l}{k} t^{l+k} (-2xt)^{l-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} x^{n-2k} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \end{aligned}$$

Da  $k \leq l = n - k$ , gilt

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} x^{n-2k}$$

mit

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

Wir betrachten die einzelnen Faktoren:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( -\frac{1}{2} - n + k + 1 \right)}_{(n-k) \text{ Faktoren}} / (n-k)!$$

$$\binom{n-k}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-2k)! k!}$$

$$(-2)^{n-2k} = \frac{(-2)^{n-k} 2^{n-k} (-1)^k}{2^n}$$

und damit

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1) \cdot (2n-2k) \cdot (2n-2k-2) \cdot \dots \cdot 2}{(n-k)! (n-2k)! k! 2^n} (-1)^k$$

und daraus schließlich die

### 3.1.1 Explizite Formel für die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} (-1)^k \frac{(2n-2k)! x^{n-2k}}{(n-k)! (n-2k)! k! 2^n}$$

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

### 3.1.2 Formel von Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.3)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

mit

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

□

### 3.1.3 Integraldarstellung der $P_n$

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n (z - x)^{n+1}} dz$$

$C$  ... geschlossener Weg um  $x$

Beweis mittels Cauchy'scher Formel für Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - x)^{n+1}}$$

wo  $f(x) = \frac{1}{2^n n!} (z^2 - 1)^n$  gesetzt wird.

### 3.1.4 $P_n$ und DGL

Es gilt

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad (3.4)$$

*Beweis.* Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg um  $x$ .

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n (n+1)}{2^n (z - x)^{n+2}} dz \\ P_n''(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n (n+1)(n+2)}{2^n (z - x)^{n+3}} dz \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n dz}{2^n (z - x)^{n+3}} [(1 - x^2)(n+2) - 2x(z - x) + n(z - x)^2] &= \frac{n+1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n dz}{2^n (z - x)^{n+3}} [2(n+1)z(z - x) - (n+2)(z^2 - 1)] \\ &= \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_{\gamma} dz \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z^2 - 1)^{n+1}}{(z - x)^{n+2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

□

### 3.1.5 Normierung, Orthogonalität

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \quad (3.5)$$

*Beweis.* Wir multiplizieren die DGL für die Legendre-Polynome (3.4)  $P_n$  mit  $P_m$  und jene für  $P_m$  mit  $P_n$ ; dann bilden wir die Differenz der so erhaltenen Produkte:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right\} \right] P_m - \left[ \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} \right] P_n + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m &= 0 \\ \left[ \frac{d}{dx} (1-x^2) \left( P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right) \right] + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m &= 0 \\ \left[ (1-x^2) \left( P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right) \right]_{-1}^1 + [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde zwischen  $-1$  und  $1$  integriert; der linke Term verschwindet dadurch offensichtlich. Damit nun

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

muss, falls  $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Für  $m = n$  gilt unter Verwendung der Formel von Rodrigues (3.3) und weiters durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^n}{dx^n} (z^2-1)^n \right) \left( \frac{d^n}{dx^n} (z^2-1)^n \right) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (z^2-1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (z^2-1)^n dx \\ &= \dots = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (z^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (z^2-1)^n dx \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (z^2-1)^n dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned} (z^2-1)^n &= z^{2n} - z^{2(n-1)} + \dots + (-1)^n \\ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (z^2-1)^n &= (2n)! \end{aligned}$$

Weiters gilt, wieder unter Verwendung partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (z-1)^n (z+1)^n dx &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (z-1)^{n-1} (z+1)^{n+1} dx = \dots \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (z+1)^{2n-1} dx \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(z+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 3.6 ein, so ergibt sich schließlich

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

Damit stellen die Legendre-Polynome  $P_n(x)$  ein *orthogonales, normiertes Funktionensystem* dar. □

*Bemerkung* (Entwicklung von Polynomen nach Legendre-Polynomen). Sei  $p_n(z)$  ein Polynom  $n$ -ter Ordnung in  $z$ . Dann lässt sich  $p_n(z)$  durch die Legendre-Polynome  $P_0(z), \dots, P_n(z)$  ausdrücken:

$$p_n(z) = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + \dots + a_n P_n(z) \tag{3.7}$$

Für die Koeffizienten  $a_m$  folgt durch Integration von Gleichung 3.7 und Anwendung von Gleichung 3.5

$$\int_{-1}^1 p_n(z) P_m(z) dz = \frac{2}{2m+1} a_m$$

*Bemerkung* (Entwicklung von Funktionen nach Legendre-Polynomen). Sätze über Konvergenz (ohne Beweis) ähnlich wie bei Fourierreihenentwicklung.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \\ a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \end{aligned}$$

Z. B. gleichmäßige Konvergenz für auf  $[-1, 1]$  stetige, stetig differenzierbare Funktion.

**Definition** (Assoziierte Legendre-Funktionen).

$$P_n^m(x) := (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

**Beispiel.**

$$P_1^1(z) = (1-z^2)^{1/2}$$

**Beispiel.** Die assoziierten Legendre-Funktionen  $P_n^m$  bilden eine Orthonormalbasis (ohne Beweis). Es gilt z. B.

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) P_l^m(z) dz = \delta_{nl} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+l)!}{(n-l)!}$$

Bemerkung.  $P_n^m(x) = 0$  wenn  $m > n$

Differentialgleichung Assoziierte Legendre-Funktionen  $P_l^m$

$$((1-x^2)P_l^m)' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m = 0 \quad (3.8)$$

### 3.2 Besselfunktion $J_n(x)$

Erzeugende Funktion:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Entwicklung in Laurentreihe:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

zur Erinnerung:  $f(z)$  singulär bei  $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

$\gamma$  ... geschlossener Weg um 0

daraus folgt:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{x}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}} dw$$

substituieren  $w = \frac{2z}{x}$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\gamma} e^{z-\frac{z^2}{4z}} z^{-n-1} dz$$

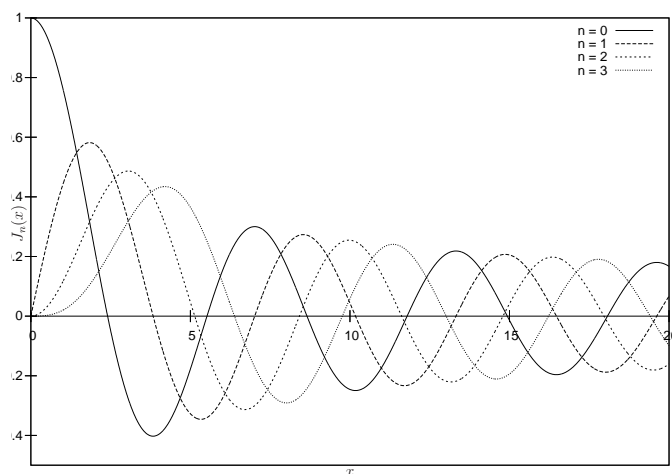


Abbildung 3.3: Die ersten drei Bessel-Funktionen  $J_n$

Es heben sich alle Potenzen weg, außer jene, wo  $\frac{1}{z}$  stehen bleibt:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$e^{-\frac{x^2}{4z}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^{2r}}{(4z)^r}$$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{\gamma} dz z^{-n-r+k-1}}_{\text{wenn } n \geq 0: \delta_{k, n+r}}$$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad \text{konvergiert } \forall x$$

(siehe dazu auch Übungsbeispiele für  $n < 0$ :  $J_n(x) = (-1)^n J_{|n|}(x)$ )

**Behauptung.**  $J_n$  erfüllen die Bessel'sche DGL

$$J_n'' + \frac{1}{x} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0$$

Beweis: analog zu Legendre-Polynomen mittels Integralformel für  $J_n(x)$  (siehe auch hier Übungen; man verwendet  $\int_{\gamma} dz \frac{d}{dz} \left(e^{z - \frac{x^2}{4z}} z^{-n-1}\right) = 0$ ).

Auch die Besselfunktionen bilden eine Orthonormalbasis.

### 3.3 Hermite-Polynome

**Definition.**

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

**Beispiel.**

$$e^{-t^2+2tx} = 1 - t^2 + 2tx + \frac{1}{2}4t^2x^2 + \dots$$

$$= 1 + 2xt + \frac{1}{2}(4x^2 - 2)t^2 + \dots$$

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 4x^2 - 2$$

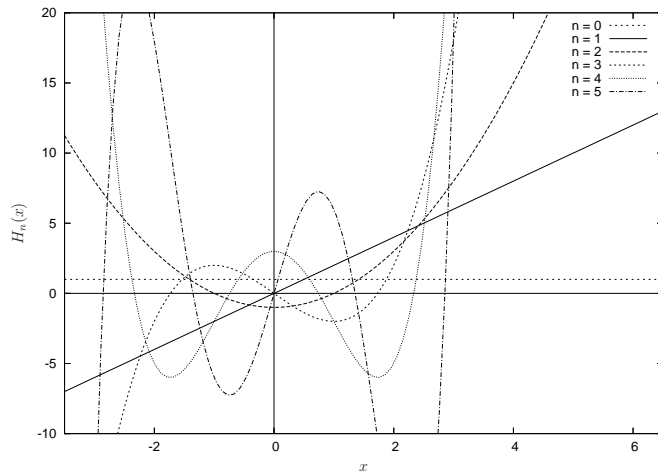


Abbildung 3.4: Die ersten sechs Hermite-Polynome  $H_n$

**Behauptung.**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} &= (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{d^n}{dx^n} e^{-(x-t)^2} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \right|_{t=0} (-1)^n \\ &= \left. \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2+2tx}) \right|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \left. \frac{d^n}{dt^n} t^k \right|_{t=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \delta_{nk} k! = H_n(x) \end{aligned}$$

□

### 3.3.1 Integraldarstellung

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

$\gamma$  ... geschlossener Weg um 0

### 3.3.2 Differentialgleichung

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

(ohne Beweis; analog zu Legendre-Polynome, Besselfunktionen)

### 3.4 Laguerre-Polynome $L_n(x)$

#### 3.4.1 Erzeugende Funktion

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \quad |t| < 1$$

Die  $L_n(x)$  sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe.

#### 3.4.2 Integraldarstellung

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-x \frac{z}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}} dz$$

$C \dots$  geschlossener Weg um 0 ohne 1 zu umschließen

**Behauptung.**

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

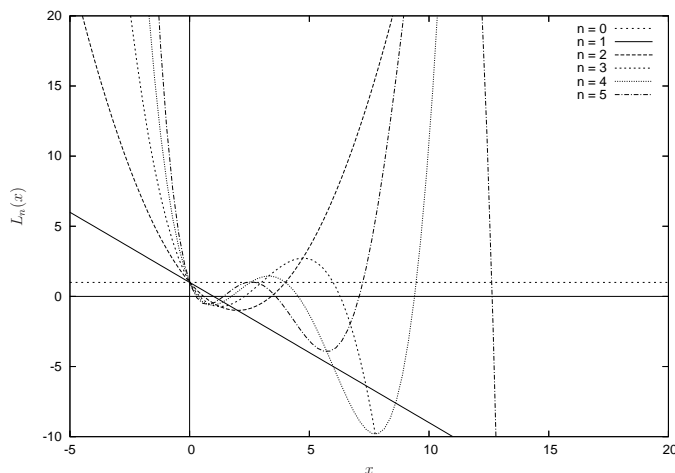


Abbildung 3.5: Die ersten sechs Laguerre-Polynome  $L_n$

*Beweis.* Einsetzen in Integralformel

$$z = \frac{w-x}{w} \quad \text{bzw.} \quad w = \frac{x}{1-z}$$

$$dz = \frac{dw w - (w-x)dw}{w^2} = \frac{x}{w^2} dw$$

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-x \frac{w-x}{w}} \frac{1}{1 - \frac{w-x}{w}}}{\left(1 - \frac{w-x}{w}\right) \left(\frac{w-x}{w}\right)^{n+1}} \frac{x \, dw}{w^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i} e^x \int_{\gamma} e^{-w+x} w^{1-2+n+1} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} dw \\
&= e^x \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} w^n e^{-w} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} dw \\
&= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})
\end{aligned}$$

□

### 3.4.3 Assoziierte Laguerre-Polynome

$$L_n^m(x) := (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x)$$

### 3.4.4 Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n &= 0 \\
xL_n^{m''} + (1+m-x)L_n^{m'} + nL_n^m &= 0
\end{aligned}$$

(Beweis mittels Integraldarstellung)

## 3.5 Kugelfunktionen $Y_l^{lm}(\vartheta, \varphi)$

**Definition.**

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} & m \geq 0 \\ (-1)^m (Y_l^{-m}(\vartheta, \varphi))^* & m < 0 \end{cases}$$

wo

$$l = 0, 1, 2$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$\vartheta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{P_0^0(\cos \vartheta)}_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Kugelfunktionen sind bezüglich des vollständigen Orthonormalsystems der (assoziierten) Legendrepolynome definiert.

Sie bilden daher selbst ein vollständiges ONS für Funktionen, die auf der Einheitskugel definiert sind (d.h. von  $(\vartheta, \varphi)$  abhängen).

Insbesondere kann man zeigen, dass:

$$\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_n^{*m}(\vartheta, \varphi) Y_n^{m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (3.9)$$

**Es gilt das wichtige Additionstheorem:**

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

wo  $\alpha$  der Winkel zwischen  $(r, \vartheta, \varphi)$  und  $(R, \theta, \phi)$  ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin \vartheta \sin \theta (\cos \varphi \cos \phi + \sin \varphi \sin \phi) + \cos \vartheta \cos \theta \\ &= \sin \vartheta \sin \theta \cos(\varphi - \phi) + \cos \vartheta \cos \theta \end{aligned}$$

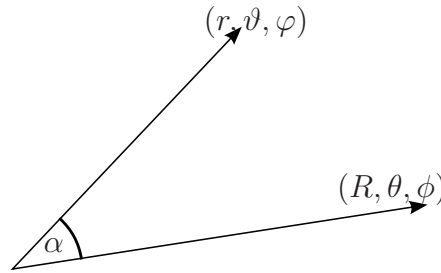


Abbildung 3.6: Additionstheorem der Kugelfunktionen

*Beweis.* 1.  $\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi)$   
ist unter Drehungen des Koordinatensystems invariant (Darstellungstheoreme, Drehgruppe, Übungsbeispiele)

2. wählen  $\vartheta = 0$ , also  $\cos \alpha = \cos \theta$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(0, \varphi) Y_l^m(\alpha, \phi) &= \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(1) e^{-im\varphi} P_l^m(\cos \alpha) e^{im\varphi} \\ &= \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{m0} P_l^m(\cos \alpha) \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} P_l^0(\cos \alpha) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \alpha) \end{aligned}$$

□

### 3.6 Gammafunktion $\Gamma(x)$

Wir betrachten zunächst für  $\alpha > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

differenzieren  $n$ -mal nach  $\alpha$

$$\int_0^{\infty} (-t)^n e^{-\alpha t} dt = (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{\alpha^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

multiplizieren mit  $(-1)^n$  und setzen

$$\alpha = 1: \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Definition.**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad x \in \mathbb{R}^+$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! \\ \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0! \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

mit  $t = \frac{\tau^2}{2}$ ,  $dt = \tau d\tau = \sqrt{2}t^{1/2}d\tau$ .

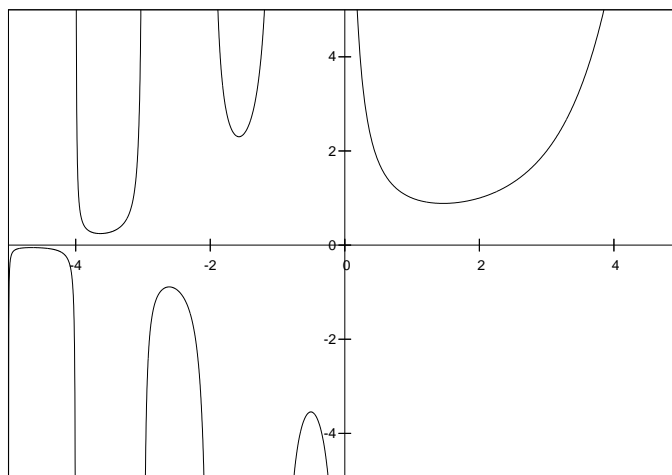


Abbildung 3.7: Die Gammafunktion  $\Gamma(x)$

Es gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \underbrace{t^x}_u \underbrace{e^{-t}}_{v'} dt &= \underbrace{t^x(-e^{-t})}_0 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt \, xt^{x-1}(-e^{-t}) \\
&= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

**Definition.** Wenn  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$  können wir  $\Gamma(x) := \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$  definieren.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Für  $x \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ist  $\Gamma(x)$  singulär!

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(1 + \epsilon)}_1 \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$