

Kapitel 2

Fourierreihen und -transformation

2.1 Fourierreihen

1822 postulierte Fourier (ohne stichhaltige Beweise):

„Jede beliebige Funktion $f(x)$ mit Periode L , d. h. $f(x) = f(x + L)$, lässt sich in eine Reihe der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

entwickeln, wo

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Analog gilt (siehe Übungen)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

wo

$$c_n = \int_0^L f(x) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} dx$$

Beweise zu Fouriers Postulat – unter welchen Voraussetzungen die Reihe in welchem Sinne konvergiert:

Mitte 19. Jhd.: Dirichlet, Riemann

Anfang 20. Jhd.: Lebesgue, Riesz, Fischer

Beispiel.

$$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 \quad x \in [0, 2\pi]$$

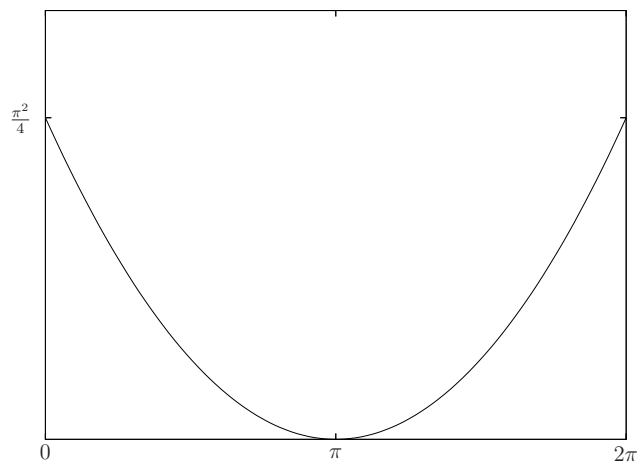


Abbildung 2.1: $f(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$

Offensichtlich gilt $f(0) = f(2\pi) = \frac{\pi^2}{4}$

Für $n \neq 0$ ist

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \cos nx dx = \dots = \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \dots = 0$$

und

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit

$$f(x) \stackrel{?!?}{=} \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Wollen folgenden Satz beweisen:

Satz. Sei $f(x)$ L -periodisch, stetig und stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe $f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x}$ gleichmäßig gegen f (o. B. d. A. $L = 1$).

Beweis in zwei Schritten:

1. Fourierreihe konvergiert gleichmäßig
2. Für festes $x \in [0, 1]$ konvergiert Fourierreihe punktweise gegen f .

Einige Hilfsüberlegungen:

$$\int_c^{c+1} f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_0^1 f(x) dx$$

wo $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = f(x+1)$.

$$\int_c^1 f(x) dx + \int_1^{c+1} f(x) dx = \int_0^c f(y+1) dx = \int_0^c f(y) dy = \int_0^c f(x) dx$$

wo $y = x - 1$ gesetzt wurde.

Bessel'sche Ungleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \quad (2.1)$$

Beweis. Im folgenden ist \bar{c}_n das komplex Konjugierte von c_n .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 dx \left(f - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n e^{-2\pi i n x} \right) \left(f - \sum_{m=-N}^N c_m e^{2\pi i m x} \right) \\ &= \int_0^1 dx f(x)^2 - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx - \sum_{m=-N}^N c_m \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \bar{c}_n \bar{c}_m \int_0^1 e^{-2\pi i (n-m)x} dx \\ &= \int_0^1 dx f(x)^2 - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n c_n - \sum_{m=-N}^N c_m \bar{c}_m + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \bar{c}_n \bar{c}_m \delta_{nm} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &\leq \int_0^1 f(x)^2 dx \quad \forall N \end{aligned}$$

□

Riemann-Lebesgue Lemma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (2.2)$$

Beweis. Da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$$

muss c_n Nullfolge sein!

□

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n b_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N |b_n|^2} \quad (2.3)$$

Nun wollen wir zeigen, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, d. h. für alle ϵ existiert ein N_0 unabhängig von $x \in [0, 1]$, sodass $\forall N', N > N_0$, wo $N' < N$

$$|f_N(x) - f_{N'}(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

Beweis. Zunächst zeigen wir

$$\begin{aligned} |f_N(x) - f_{N'}(x)| &= \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x} - \left(\sum_{n=-N'}^{-N-1} + \sum_{n=-N}^N + \sum_{n=N+1}^{N'} \right) c_n e^{2\pi i n x} \right| \\ &= \left| \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} c_n e^{2\pi i n x} \right| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |c_n| \end{aligned} \quad (2.4)$$

□

Da laut Voraussetzung f stetig differenzierbar ist, können wir die Fourierkoeffizienten $d_n := \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx} dx$ von f' betrachten. Es gilt die Ableitungsformel

$$d_n = 2\pi in c_n \quad (2.5)$$

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$d_n = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx} dx = f(x)e^{-2\pi inx} \Big|_0^1 - (-2\pi in) \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx = 0 + 2\pi in c_n$$

wobei der erste Term aufgrund der Periodizität verschwindet .

□

Nun setzen wir die Ableitungsformel (2.5) in (2.4) ein, wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.3) an und erhalten die erste Zeile der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} |f_N(x) - f_{N'}(x)| &\leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} d_n \right| \leq \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} \right|^2} \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |d_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} \right|^2} \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |d_n|^2} \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2 dx} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{N}} \cdot \text{const} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Weiters haben wir in der zweiten Zeile die Bessel'sche Ungleichung (2.1) für $f'(x)$ sowie die folgende Überlegung verwendet:

$$\sum_{N+1 \leq |n|} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1} \Big|_{N+1}^{\infty} = \frac{2}{N}$$

Wir zeigen nun, dass für festes $x \in [0, 1]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N(x) - f(x)) = 0$$

Definition. Dirichlet-Klassen

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi inx}$$

Bemerkung.

$$D_N(x) = D_N(x+1)$$

Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} 1 = 2N + 1$$

Nun sei $x \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e^{-2\pi i N x} \frac{1 - e^{2\pi i (2N+1)x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{e^{2\pi i (N+1)x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{2\pi i x} - 1} \\ &= \frac{e^{\pi i x}}{e^{\pi i x}} \cdot \frac{e^{i\pi(2N+1)x} - e^{-i\pi(2N+1)x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x} \end{aligned}$$

und mit dem Satz von L'Hospital

$$D_N(x) = \frac{\sin \pi(2N+1)x}{\sin \pi x} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Weiters

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{|n| \leq N} c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{|n| \leq N} \int_0^1 dy f(y) e^{-2\pi i n y} e^{2\pi i n x} \\ &= \int_0^1 dy f(y) D_N(x-y) = \int_{-x}^{1-x} dy' f(x+y') D_N(y') = \int_{-1/2}^{1/2} dy f(x+y) D_N(y) \end{aligned}$$

wo $y' = y - x$. In der letzten Gleichung wurde die Periodizität des Integranden benutzt ($y' \rightarrow y' + 1$).

$$\begin{aligned} f_N(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} dy \{f(x+y) - f(x)\} D_N(y) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} dy \frac{f(x+y) - f(x)}{\sin \pi y} \sin \pi(2N+1)y \end{aligned}$$

Dabei ist der erste Faktor des Integranden stetig in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Schließlich gilt, unter Benutzung des Riemann-Lebesgue-Lemmas (2.2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N(x) - f(x)) = 0$$

Weitere Verallgemeinerung:

Satz. Sei f stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen, die nur Sprungstellen sein sollen. Bis auf die Sprungstellen und weitere endlich viele Knicke sei f stetig differenzierbar und es sollen überall Links- und Rechtsableitungen existieren.

Dann

1. konvergiert $f_n(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Sprungstelle enthält.
2. konvergiert $f_n(x)$ um die Sprungstelle x_0 gegen

$$\frac{1}{2} (f(x_0+0) + f(x_0-0))$$

den Mittelwert von $\lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f(x_0+0)$ und $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) =: f(x_0-0)$.

Bemerkung. 1. Abgesehen von Knickstellen schon bewiesen; bisheriger Beweis bleibt gültig auch für Knickstellen, da die Bessel'sche Ungleichung und das Riemann-Lebesgue-Lemma auch für diesen Fall gültig sind (ohne Beweis, siehe später).

Gibbs-Phänomen (ohne Beweis) In der Nähe einer Sprungstelle wird $f(x)$ von den Partialsummen $f_N(x)$ um ca. 8,9% der Sprungweite übertroffen, $x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$.

Beispiel.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f_N(x_{\max}) - f(x_{\max}) = 0.179\dots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

2.2 Fourier-Transformation

Für die stetige und stetig differenzierbare, L -periodische Funktion $f(n)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L/2}^{L/2} f(y) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}y} dy \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{-i\frac{2\pi n}{L}y} dy \right) e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \end{aligned}$$

Intuitiv: wenn $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{2\pi n}{L} \\ dk &\approx \frac{2\pi}{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dk \end{aligned}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx}$$

In welchem Sinn gilt nun die Näherung; und für welche $f(x)$ existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$?

Definition. Sei S die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, sodass f und alle ihre Ableitungen schneller als jede Potenz bei $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null geht; das bedeutet mathematisch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < \infty \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

oder: es existiert ein $x_0 > 0$, sodass für $|x| > x_0$

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \text{const} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

oder

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f^{(q)}(x)| = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}e^{-x^L} &\in S \\ \frac{1}{1+x^2} &\notin S \\ e^{-x} &\notin S \\ e^{-|x|} &\notin S\end{aligned}$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned}f \in S &\Rightarrow f^{(n)} \in S \\ f \in S &\Rightarrow p(x)f(x) \in S\end{aligned}$$

wo $p(x)$ Polynom.

Definition (Fouriertransformation). Sei $f \in S$. Dann lauten die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}f$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx & k \in \mathbb{R} \\ (\mathcal{F}^{-1}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx & x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Satz. Wenn $f \in S$, dann existiert $\mathcal{F}f$.

Beweis.

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F}f)(k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{0 \leq |x| \leq x_0} |f(x)| dx + \int_{|x| > x_0} |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| > x_0} \frac{c}{x^2} dx = \frac{2c}{x_0} < \infty\end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass der linke Term wegen der Stetigkeit von f endlich ist. Weiters kann man x_0 so wählen, dass für $|x| > x_0$ gilt $|f(x)| \leq \frac{c}{x^2}$.

□

Bemerkung. $(\mathcal{F}f)(k)$ konvergiert für $f \in S$ absolut (ist dabei k -unabhängig); und ist somit gleichmäßig konvergent in k .

Beispiel.

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x^2/2} \\ \Rightarrow (\mathcal{F}f)(k) &= e^{-k^2/2}\end{aligned}$$

Siehe dazu auch die Übungen!

Definition (Gleichmäßige Konvergenz).

$$\int_0^{\infty} f(x, y) dx$$

konvergiert gleichmäßig in $y \in [y_0, y_1]$ falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, sodass für alle $N_1, N_2 > N$, $y \in [y_0, y_1]$ gilt

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon$$

Die Funktionen

$$g(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx \quad \text{stetig}$$

$$g'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

nur wenn $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ gleichmäßig konvergent in y .

2.2.1 Ableitungsformeln

$$(\mathcal{F}f')(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^\infty + ik \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ikx} dx \right]$$

$$= ik(\mathcal{F}f)(k) \tag{2.6}$$

Dabei wurde partiell integriert (das ist erlaubt, da $(\mathcal{F}f')(k)$ gleichmäßig konvergent in k ist). Der erste Term fällt dann weg, da $f(x) \in S$.

Iteration führt zu höheren Ableitungen:

$$(\mathcal{F}f^{(p)})(k) = (ik)^p (\mathcal{F}f)(k)$$

$$(\mathcal{F}f)'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \left(\frac{d}{dx} e^{-ikx} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) (-ix) e^{-ikx} dx$$

$$= (\mathcal{F}(-ixf))(k) \tag{2.7}$$

Hier ist mit $f(x) \in S$ auch $ixf(x) \in S$. Da $(\mathcal{F}(-ixf))(k)$ gleichmäßig konvergent in k , durfte unter dem Integralzeichen differenziert werden.

Iteration:

$$(\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (\mathcal{F}(-ix)^{(q)}f)(k)$$

Insgesamt

$$(-ix)^p (\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (ik)^p \mathcal{F}((-ix)^q f)(k) = \mathcal{F}\left(\left((-ix)^q f\right)^{(p)}\right)(k) \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Satz. *Fourierreihe bildet S auf sich selbst ab, d. h. wenn $f \in S$, dann auch $\mathcal{F}f \in S$. (siehe Übungen)*

Satz (Plancherel-Gleichung). *(ohne Beweis.) Für $f \in S$ gilt*

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |(\mathcal{F}f)(k)|^2 dk$$

Satz (Faltungstheorem). Für $f, g \in S$ gilt

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g \quad (2.8)$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \quad (2.9)$$

wo

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx' = (g \circ f)(x) \quad (2.10)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x')dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky'} g(y')dy' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'+y')} f(x')g(y')dx'dy' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} (g \circ f)(x) = \mathcal{F}((g \circ f))(k) \\ &= \mathcal{F}((f \circ g))(k) \end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir $x = x' + y'$, $y = y'$ und $dx'dy' = dx dy$ verwendet.

□

2.2.2 Anwendungsbeispiel der Fouriertransformation

Auffinden spezieller Lösungen von Differentialgleichungen, z. B.

$$y'' - y = f$$

bei vorgegebenem $f \in S$.

Fouriertransformation der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}y'' - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ -k^2 \mathcal{F}y - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ -(1+k^2)\mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ \mathcal{F}y &= -\frac{1}{1+k^2} \mathcal{F}f \end{aligned}$$

Rücktransformation und Anwendung des Faltungstheorems 2.9 ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}y = y &= -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \\ y(x) &= -\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ f\right)(x) \\ y(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|} f(x')dx' \end{aligned}$$

da $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ (siehe Übungen).

Bemerkung. Vgl. frühere Formel für spezielle Lösungen:

Homogene Lösung $y'' - y = 0$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= e^x \\
 y_2 &= e^{-x} \\
 W &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \\
 y_{\text{spez}}(x) &= -e^x \int_{c_1}^x \frac{e^{-x'} f(x')}{-2} dx + e^{-x} \int_{c_1}^x \frac{e^{x'} f(x')}{-2} dx
 \end{aligned}$$

hängt mit obiger Lösung zusammen:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|} f(x') dx' &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-x+x'} f(x') dx' - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x-x'} f(x') dx' \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{c_1}^x e^{-x+x'} f(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{c_2}^x e^{x-x'} f(x') dx' + K_1 e^{-x'} + K_2 e^x
 \end{aligned}$$

Dabei sind K_1 und K_2 endlich, da $f(x) \in S$.

2.2.3 Mehrdimensionale Fouriertransformation

Definition. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $f(\mathbf{x}) \in S$, wenn f beliebig hohe partielle Ableitungen besitzt und für $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ sowie für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, $p_i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^k \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| = 0$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
 e^{-r^2} &\in S \\
 x_1^2 e^{-r^2} &\in S
 \end{aligned}$$

Dagegen $e^{-x_1^2} \notin S$, da es mit $x_1 = 0$ bei $r \rightarrow \infty$ nicht abfällt.

Definition (Mehrdimensionale Fouriertransformation). Sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n x \\
 (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n k
 \end{aligned}$$

Beispiel. $n = 3$, $\mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2/2} = \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2/2}$$

$$(\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^3 e^{-k_i^2/2} = e^{-\mathbf{k}^2/2}$$

Bei allgemeinen $f(\mathbf{x})$ faktorisiert $(\mathcal{F}f)(\mathbf{k})$ nicht!

2.2.3.1 Fouriertransformation einer radialsymmetrischen Funktion

Sei $n = 3$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $f(\mathbf{x}) = f(r)$. Denken wir uns $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ fest,

$$\mathbf{k}\mathbf{x} = kr \cos \theta$$

$$d^3x = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = r^2 dr d\cos \theta d\phi$$

wo $k = |\mathbf{k}|$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) &\stackrel{!}{=} (\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos \theta e^{-ikr \cos \theta} r^2 f(r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty dr \left[\frac{1}{ikr} e^{-ikr \cos \theta} \right]_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} r^2 f(r) \\ (\mathcal{F}f)(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty dr f(r) r \sin kr \end{aligned} \quad (2.11)$$

Analog die Rücktransformation

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^\infty dk f(k) k \sin kr \quad (2.12)$$

Wählen Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$; weiters

$$d^3x = dx_1 dx_2 dx_3 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

Wählen x_1, x_2, x_3 -Achsen so, dass $\mathbf{k} \parallel x_3$ -Achse

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem $k = |\mathbf{k}|$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} f(r) &= e^{-ar} \quad a > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{k}| (\mathcal{F}f)(|\mathbf{k}|) &= \int_0^\infty dr \sin |\mathbf{k}| r e^{-ar} r = \operatorname{Im} \int_0^\infty dr e^{-(a-i|\mathbf{k}|)r} r \\ &= \operatorname{Im} \frac{1}{a-i|\mathbf{k}|} \int_0^\infty dr e^{-(a-i|\mathbf{k}|)r} r = \operatorname{Im} \frac{1}{(a-i|\mathbf{k}|)^2} \cdot \frac{(a+i|\mathbf{k}|)^2}{(a+i|\mathbf{k}|)^2} \\ &= \frac{2a|\mathbf{k}|}{(a^2+k^2)^2} \\ (\mathcal{F}f)(|\mathbf{k}|) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2a|\mathbf{k}|}{(a^2+k^2)^2} \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde dabei partiell integriert.

[1] ARFKEN, G.: *Mathematical Methods for Physicists*. Addison-Wesley, 1981.